Notion de contrainte

Christian La Borderie

2 mars 2004

1 Signification:

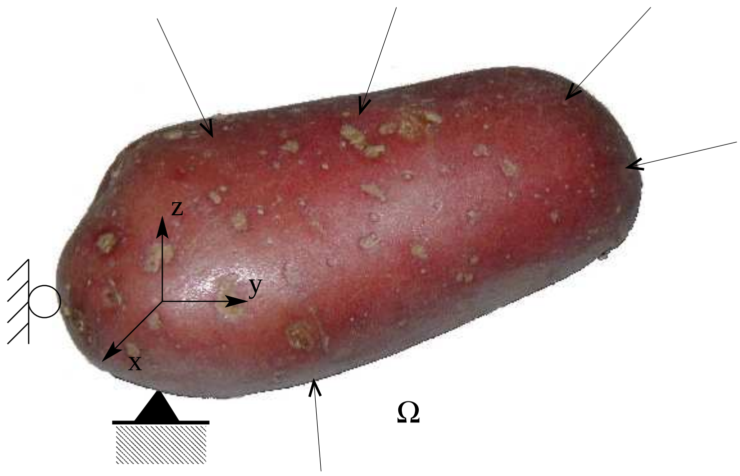
Les contraintes représentent les efforts de cohésion dans un solide qui permettent à la matière à résister aux sollicitations.

Les contraintes sont issues d'interaction entre des petites parties de la matière (cristaux, molecules ... etc ...).

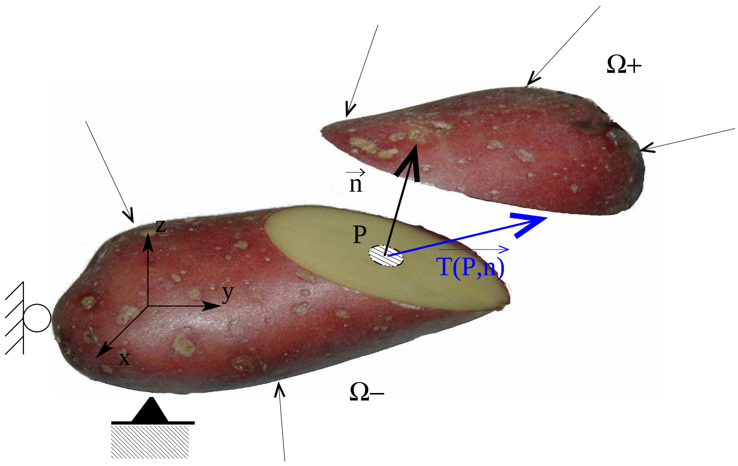
L'équivalent de la contrainte pour un fluide parfait est la pression.

2 Définition:

Soit un corps Ω sollicité par un ensemble d'actions mécaniques et en équilibre dans un référentiel. Toute partie de Ω est en équilibre.



Si on coupe Ω par un plan cd mormale $\overrightarrow{n}$ passant par le point P, les deux parties Ω^+située du côté de la normale et Ω^-située du côté opposé, sont en équilibre.



Ω^+ est en équilibre sous l'effet:

- Des efforts qui lui sont exercés.
- De la contrainte $\overrightarrow{T\left(P,\overrightarrow{n}\right)}$exercée en tout point P du plan de coupure.

$\overrightarrow{T\left(P,\overrightarrow{n}\right)}$ est la densité surfacique au point P des efforts exercés par Ω^+sur Ω^-

3 Remarques:

Le vecteur contrainte est homogène à un effort par unité de surface ou une pression, il s'exprime en Pascals.

$$1Pa = 1N/m^2,\ 1MPa = 10^6Pa,\ 1kPa = 10^3Pa,\ 1GPa = 10^9Pa$$

Il existe aussi des unités plus exotiques:

$$1T/m^2 \simeq 10kPa,\ 1kg/cm^2 \simeq 100kPa,\ 1bar = 100kPa,\ 1PSI \simeq 6{,}9MPa$$

L'emploi de ces unités est vivement déconseillé.

Si en un point P on effectue deux plans de coupure de normales $\overrightarrow{n_1}$et $\overrightarrow{n_2}$, on obtient deux vecteurs contraintes $T\left(P,\overrightarrow{n_1}\right)$ et $T\left(P,\overrightarrow{n_2}\right)$ qui sont à priori différents.

En deux points P et Q d'un même plan de coupure de normale $\overrightarrow{n}$ on obtient deux vecteurs contraintes $T\left(P,\overrightarrow{n}\right)$et $T\left(Q,\overrightarrow{n}\right)$ qui sont à priori différents.

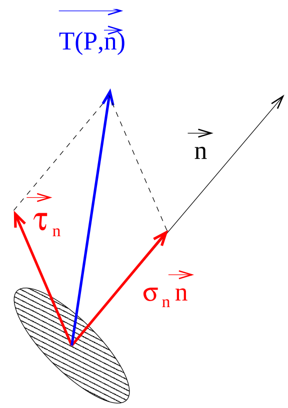
Le torseur résultant des actions de Ω^+sur Ω^-pour un plan de coupure Π de normale $\overrightarrow{n}$ est :

$$\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\Omega+/\Omega^-}} = \int\int_{\Pi} \overrightarrow{T(P,\overrightarrow{n})}ds \\ \overrightarrow{M_{A,\Omega+/\Omega^-}} = \int\int_{\Pi} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{T(P,\overrightarrow{n})}ds \end{array}\right\}_A$$

4 Projections du vecteur contrainte:

4.1 Contraintes normales et tangentielles:

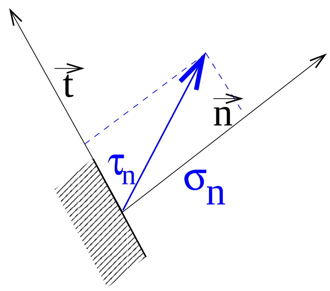
Le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale σ_n et une contrainte tangentielle$\overrightarrow{\tau_n}$



On peut écrire:$\sigma_n = \overrightarrow{T(P,\vec{n})} \bullet \vec{n}$ $\quad\quad$ $\vec{\tau_n} = \overrightarrow{T(P,\vec{n})} - \sigma_n \vec{n}$

- La contrainte normale $\sigma_n$est un nombre.
- La contrainte tangentielle $\vec{\tau_n}$ est un vecteur.

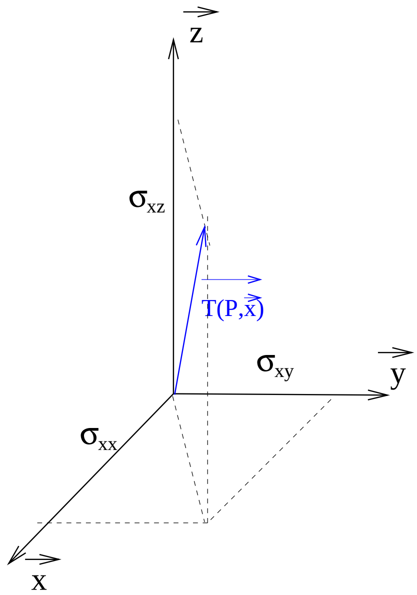
Dans le cas d'un hypothèse de calcul plan (plan normal à l'axe $\vec{z}$) nous pouvons projeter lae vecteur contrainte sur les vecteur $\vec{n}$ et $\vec{t} = \vec{z} \wedge \vec{n}$:



$\sigma_n = \overrightarrow{T(P,\vec{n})} \bullet \vec{n}$ $\quad\quad$ $\tau_n = \overrightarrow{T(P,\vec{n})} \bullet \vec{t}$
Dans ce cas les contraintes normales et tangentielles sont des nombres.

4.2 Projection sur des vecteurs de base:

Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base (orthonormée directe tant qu'à faire), on nomme les projections des vecteurs contraintes de la manière suivante:



$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_{xx}=\overrightarrow{T(P,\vec{x})}\bullet\vec{x}\\ \sigma_{xy}=\overrightarrow{T(P,\vec{x})}\bullet\vec{y}\\ \sigma_{xz}=\overrightarrow{T(P,\vec{x})}\bullet\vec{z}\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\sigma_{yx}=\overrightarrow{T(P,\vec{y})}\bullet\vec{x}\\ \sigma_{yy}=\overrightarrow{T(P,\vec{y})}\bullet\vec{y}\\ \sigma_{yz}=\overrightarrow{T(P,\vec{y})}\bullet\vec{z}\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\sigma_{zx}=\overrightarrow{T(P,\vec{z})}\bullet\vec{x}\\ \sigma_{zy}=\overrightarrow{T(P,\vec{z})}\bullet\vec{y}\\ \sigma_{zz}=\overrightarrow{T(P,\vec{z})}\bullet\vec{z}\end{array}\right.$$

Il est évident que les σ_{ij} sont des nombres qui dépendent de l'état de contrainte de la matière au point P , mais également de la base de projection $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, que pour une base de projection différente, on obtiendrait des valeurs différentes et qu'il est donc erroné d'attacher une quelconque signification physique à ces nombres.

5 Tenseur des contraintes:

Soit $\overline{\overline{\sigma_P}}$, l'application définie au point P qui à une normale $\vec{n}$ associe le vecteur des contraintes $\overrightarrow{T\,(P,\vec{n})}$.

$\overrightarrow{T\,(P,\vec{n})}=\overline{\overline{\sigma_P}}\,(\vec{n})$

$\overline{\overline{\sigma_P}}$ est une application linéaire représenté par une matrice dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$\overline{\overline{\sigma_P}}:\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On montre que $\overline{\overline{\sigma_P}}$est symétrique ($\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$), elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres de $\overline{\overline{\sigma_P}}$ sont les contraintes principales, les vecteurs propres forment le repère principal des contraintes.