

Cercle de Mohr des contraintes (2D) :

22 février 2005

1 Rappels sur la notion de contrainte :

Signification :

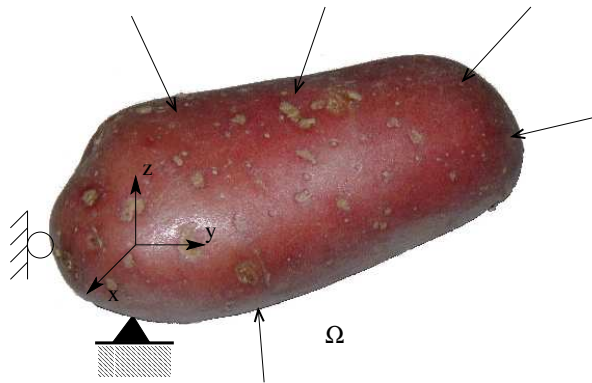
Les contraintes représentent les efforts de cohésion dans un solide qui permettent à la matière à résister aux sollicitations.

Les contraintes sont issues d'interaction entre des petites parties de la matière (cristaux, molécules ... etc ...).

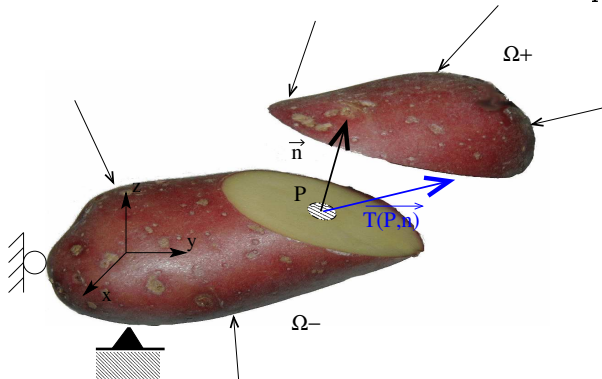
L'équivalent de la contrainte pour un fluide parfait est la pression.

Définition :

Soit un corps Ω sollicité par un ensemble d'actions mécaniques et en équilibre dans un référentiel. Toute partie de Ω est en équilibre.



Si on coupe Ω par un plan cd normale \vec{n} passant par le point P , les deux parties Ω^+ située du côté de la normale et Ω^- située du côté opposé, sont en équilibre.



Ω^+ est en équilibre sous l'effet :
 - Des efforts qui lui sont exercés.
 - De la contrainte $\overrightarrow{T(P, \vec{n})}$ exercée en tout point P du plan de coupure.
 $\overrightarrow{T(P, \vec{n})}$ est la densité surfacique des efforts exercés par Ω^+ sur Ω^-

Remarques :

Le vecteur contrainte est homogène à un effort par unité de surface ou une pression, il s'exprime en Pascals.

$$1Pa = 1N/m^2, 1MPa = 10^6 Pa, 1kPa = 10^3 Pa, 1GPa = 10^9 Pa$$

Il existe aussi des unités plus exotiques :

$$1T/m^2 \simeq 10kPa, 1kg/cm^2 \simeq 100kPa, 1bar = 100kPa, 1PSI \simeq 6,9MPa$$

L'emploi de ces unités est vivement déconseillé.

Si en un point P on effectue deux plans de coupure de normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , on obtient deux vecteurs contraintes $T(P, \vec{n}_1)$ et $T(P, \vec{n}_2)$ qui sont à priori différents.

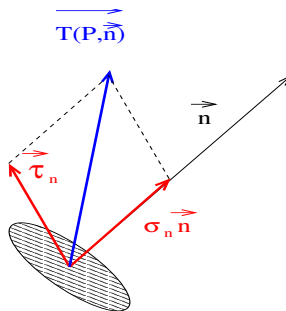
En deux points P et Q d'un même plan de coupure de normale \vec{n} on obtient deux vecteurs contraintes $T(P, \vec{n})$ et $T(Q, \vec{n})$ qui sont à priori différents.

Le torseur résultant des actions de Ω^+ sur Ω^- pour un plan de coupure Π de normale \vec{n} est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{\Omega^+/\Omega^-}} = \int \int_{\Pi} \overrightarrow{T(P, \vec{n})} ds \\ \overrightarrow{M_{A, \Omega^+/\Omega^-}} = \int \int_{\Pi} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{T(P, \vec{n})} ds \end{array} \right\}_A$$

Projections du vecteur contrainte :

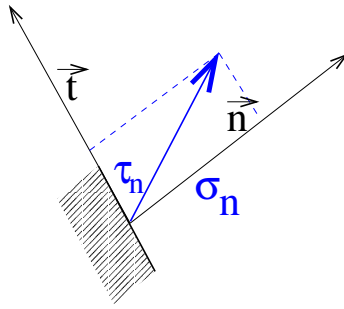
Contraintes normales et tangentielles : Le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale σ_n et une contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$



On peut écrire : $\sigma_n = \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \bullet \vec{n}$ $\vec{\tau}_n = \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \bullet \vec{n} - \sigma_n \vec{n}$

- La contrainte normale σ_n est un nombre.
- La contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ est un vecteur.

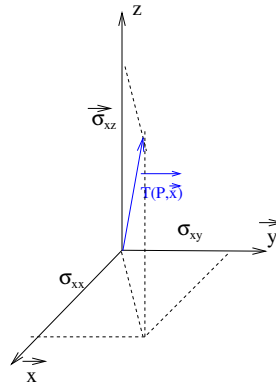
Dans le cas d'une hypothèse de calcul plan (plan normal à l'axe \vec{z}) nous pouvons projeter le vecteur contrainte sur les vecteurs \vec{n} et $\vec{t} = \vec{z} \wedge \vec{n}$:



$$\sigma_n = \overline{T(P, \vec{n})} \cdot \vec{n} \quad \tau_n = \overline{T(P, \vec{n})} \cdot \vec{t}$$

Dans ce cas les contraintes normales et tangentielles sont des nombres.

Projection sur des vecteurs de base : Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base (orthonormée directe tant qu'à faire), on nomme les projections des vecteurs contraintes de la manière suivante :



$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \overline{T(P, \vec{x})} \cdot \vec{x} \\ \sigma_{xy} = \overline{T(P, \vec{x})} \cdot \vec{y} \\ \sigma_{xz} = \overline{T(P, \vec{x})} \cdot \vec{z} \end{cases} \begin{cases} \sigma_{yx} = \overline{T(P, \vec{y})} \cdot \vec{x} \\ \sigma_{yy} = \overline{T(P, \vec{y})} \cdot \vec{y} \\ \sigma_{yz} = \overline{T(P, \vec{y})} \cdot \vec{z} \end{cases} \begin{cases} \sigma_{zx} = \overline{T(P, \vec{z})} \cdot \vec{x} \\ \sigma_{zy} = \overline{T(P, \vec{z})} \cdot \vec{y} \\ \sigma_{zz} = \overline{T(P, \vec{z})} \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Tenseur des contraintes :

Soit $\overline{\overline{\sigma_P}}$, l'application définie au point P qui à une normale \vec{n} associe le vecteur des contraintes $\overline{T(P, \vec{n})}$.

$$\overline{T(P, \vec{n})} = \overline{\overline{\sigma_P}}(\vec{n})$$

$\overline{\overline{\sigma_P}}$ est une application linéaire représenté par une matrice dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\overline{\overline{\sigma_P}} : \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

On montre que $\overline{\overline{\sigma_P}}$ est symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres de $\overline{\overline{\sigma_P}}$ sont les contraintes principales, les vecteurs propres forment le repère principal des contraintes.

2 Cercle de Mohr

Soient σ_I et σ_{II} ($\sigma_I \geq \sigma_{II}$) les contraintes principales, \vec{X}_I et \vec{X}_{II} les vecteurs propres associés, alors pour toute orientation de facette $\vec{n} = \cos \alpha \vec{X}_I + \sin \alpha \vec{X}_{II}$

la contrainte normale σ_n et la contrainte tangentielle τ_n se trouvent sur un cercle appelé cercle de Mohr.

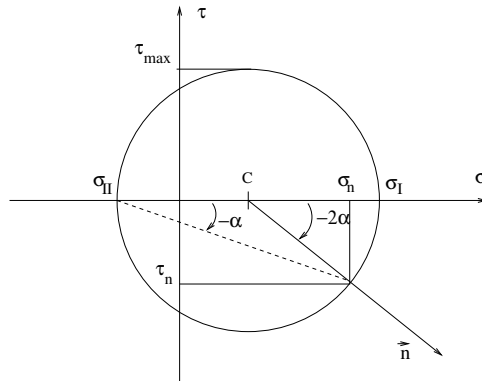


FIG. 1 – Cercle de Mohr

- Le centre du cercle C est situé sur l'axe des contraintes normales σ à l'abscisse

$$\sigma_c = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} = \frac{Tr(\bar{\sigma})}{2}$$

- On peut tracer le cercle si on connaît un point quelconque du cercle, c'est à dire la contrainte normale et la contrainte tangentielle pour une normale particulière.
- La contrainte tangentielle maximale est

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

- Les angles partant du centre du cercle de Mohr sont égaux aux angles réels multipliés par -2 .

Exercice :

On donne :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})}$$

avec $\sigma = -3MPa$ et $\tau = 2MPa$

1. Tracer le cercle de Mohr
2. Calculer les contraintes principales et indiquer les orientation des directions principales de la contrainte.
3. Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale et l'orientation de la facette correspondante.
4. Trouver la contrainte normale et la contrainte tangentielle pour une facette orientée par le vecteur $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$

Résolution :

1. Le centre du cercle est à un point d'abscisse $\sigma_c = \frac{Tr(\sigma)}{2} = -1,5MPa$
 Pour une facette orientée par le vecteur \vec{y} on a : $\sigma_y = 0$ et $\tau_y = -\tau$
 On peut donc tracer le cercle :

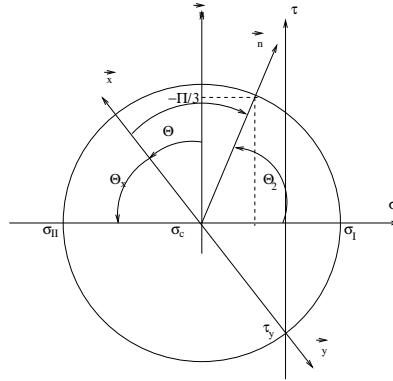


FIG. 2 – Cercle de Mohr

2. Le rayon du cercle est $R = \sqrt{\sigma_c^2 + \tau^2} = 2,5MPa$ et $\sigma_I = \sigma_c + R = 1MPa$,
 $\sigma_{II} = \sigma_c - R = -4MPa$
 Sur le cercle de Mohr, l'angle entre \vec{x} et \vec{X}_{II} est $\Theta_x = \arctan \frac{-2\tau}{\sigma} = \arctan \frac{4}{3} = 53,13^\circ$
 L'angle entre \vec{x} et \vec{X}_{II} est dans la réalité : $\alpha_x = -\frac{\Theta_x}{2} = -26,56^\circ$

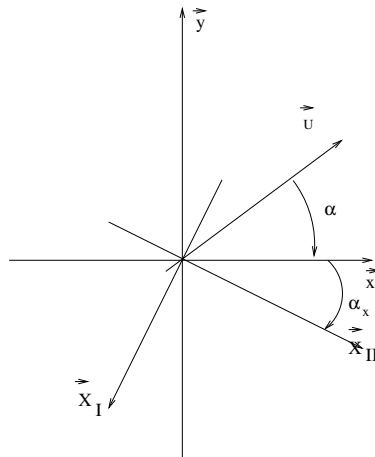


FIG. 3 – Directions

3. La contrainte de cisaillement maximale est $\tau_{max} = R = 2,5MPa$, elle est obtenue pour une facette orientée par le vecteur \vec{u} tel que l'angle entre \vec{u} et \vec{x} soit Θ sur le cercle de Mohr avec $\Theta + \Theta_x = 90^\circ$ soit $\Theta = 53,13^\circ$
 l'angle entre \vec{u} et \vec{x} est dans la réalité : $\alpha = -\frac{\Theta}{2} = -36,87^\circ$
4. L'angle entre \vec{x} et \vec{n} est dans la réalité : $\alpha_n = \Pi/6$, sur le cercle de Mohr, on a $\Theta_n = -2\alpha_n = -\Pi/3$.
 Si on pose : $\Theta_2 = \Pi - \Pi/3 - \Theta_x = 180 - 60 - 53,13^\circ = 66,87^\circ$, on a :
 $\sigma_n = \sigma_c + R \cos \Theta_2 = -0,518MPa$ et $\tau_n = R \sin \Theta_2 = 2.299MPa$