

## Principe des travaux virtuels :

### Introduction :

C'est un outil puissant qui joue le même rôle que le principe fondamental de la statique (ou de la dynamique), mais qui permet une mise en œuvre des équations plus systématique.

### Énoncé :

Dans un référentiel Galiléen et pour tout système matériel, le travail virtuel des quantités d'accélération est égal à la somme du travail virtuel des forces extérieures au système et du travail virtuel des forces intérieures, et ceci que soit le déplacement virtuel considéré.

$$W_{\text{acc}}^* = W_{\text{ext}}^* + W_{\text{int}}^*$$

### Histoire :

On doit le premier énoncé du « principe des vitesses virtuelles » au mathématicien et philosophe Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)



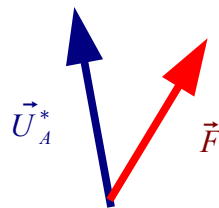
### Calcul des travaux virtuels:

Les déplacements virtuels sont infinitésimaux, le calcul des travaux virtuels se fait avec les efforts et les moments réels.

Cas d'un déplacement:

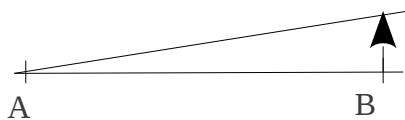
Le travail d'une force  $\vec{F}$  appliqué au point A lors d'un déplacement virtuel du point A

$$\vec{U}_A^* \text{ est } W^* = \vec{F} \cdot \vec{U}_A^*$$



Cas d'une rotation:

Les rotations virtuelles étant infinitésimales, les déplacements virtuels correspondants des points peuvent être calculés comme des vitesses :

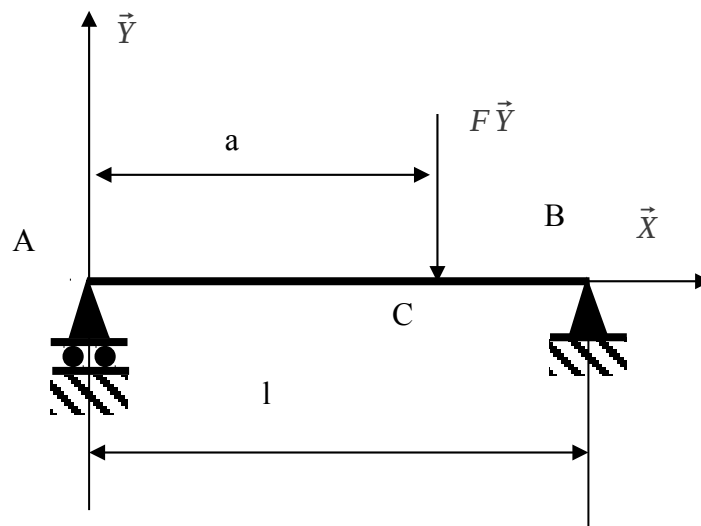


$$\text{Le travail d'un moment } \vec{M}_A \text{ d'une rotation virtuelle } \vec{\Omega}^* \text{ est } W^* = \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}^*$$

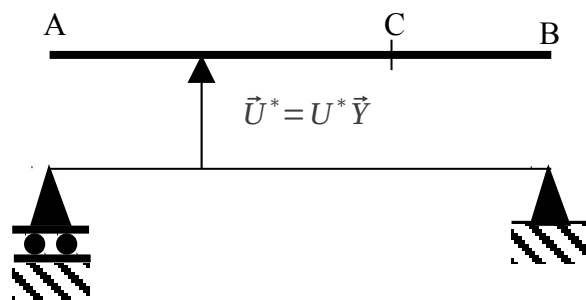
**Utilisation :**

Les champs de déplacements virtuels sont généralement notés par des \*, par exemple :  $U^*$ .  
 Les travaux virtuels occasionnés par un déplacement virtuel, se calculent simplement et sans tenir compte d'une éventuelle évolution des efforts appliqués au cours du déplacement virtuel.  
 On peut imaginer des déplacements virtuels quelconques et en particulier, des déplacements virtuels qui rompent les liaisons ou les solides.  
 On choisit généralement des déplacements virtuels qui font travailler une ou plusieurs inconnues et qui ne génèrent pas de travaux internes, ces champs de déplacements virtuels respectent les conditions de déplacements de solides indéformables et sont appelés mouvements rigidifiants.

On peut appliquer le PTV\* autant de fois que nécessaire, il faut cependant veiller à obtenir des équations indépendantes (3 équations en 2D, 6 en 3D).

**Exemple :**

Calcul des actions d'appuis :



Le champ de déplacements est une translation d'axe  $\vec{Y}$  qui rompt les liaisons en A et B.

$$W_{\text{int}}^* = 0$$

$$W_{\text{ext}}^* = \vec{R}_A \cdot \vec{U}_A^* + \vec{F} \cdot U_C^* + \vec{R}_B \cdot \vec{U}_B^*$$

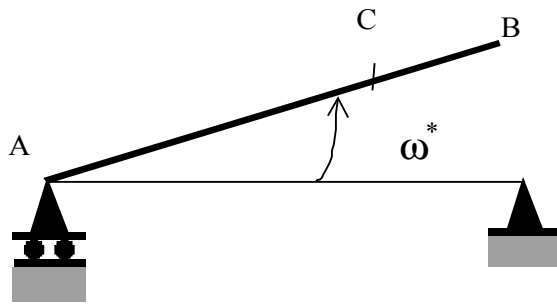
Soit :

$$W_{\text{ext}}^* = Y_A U^* + F U^* + Y_B U^*$$

Le PPV\* donne alors :

$$Y_A U^* + F U^* + Y_B U^* = 0 \quad \forall U^*$$

Soit  $Y_A + F + Y_B = 0$  ce qui correspond à l'équation de la résultante en projection /  $\vec{Y}$



Le champ de déplacements est une rotation autour de l'axe  $A\vec{Z}$

$$W_{int}^* = 0$$

$$W_{ext}^* = R_A \bullet U^*(A) + F \bullet U^*(C) + R_B \bullet U^*(B)$$

$$\text{Et : } \begin{cases} U^*(A) = 0 \\ U^*(B) = \omega^* \vec{Z} \wedge \overrightarrow{AB} = l\omega^* \vec{Y} \\ U^*(C) = \omega^* \vec{Z} \wedge \overrightarrow{AC} = a\omega^* \vec{Y} \end{cases}$$

$$W_{ext}^* = F a\omega^* + Y_B l\omega^*$$

Le PTV\* donne alors :

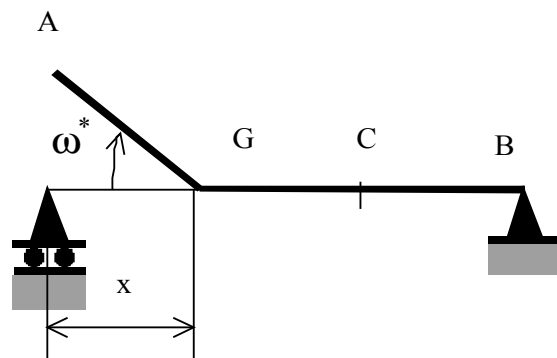
$$F a\omega^* + Y_B l\omega^* = 0 \quad \forall \omega^*$$

Soit  $F a + Y_B l = 0$  ce qui correspond à l'équation du moment en A en projection /  $\vec{Z}$

On obtient donc :  $Y_B = -F a/l$  et  $Y_A = -F (l-a)/l$

La troisième équation traditionnellement obtenue à l'aide du PFS (Projection de la résultante /  $\vec{X}$ ) est obtenue en utilisant comme champ de déplacement virtuel, une translation suivant l'axe  $\vec{X}$ .

Calcul du moment fléchissant : On écrit l'équilibre de  $\Omega$  pour  $G \in [AC]$



Le champ de déplacements virtuel correspond à une rotation  $\omega^*$  de  $[AG]$  autour de l'axe  $G\vec{z}$  pour faire travailler le moment fléchissant en G. Le déplacement virtuel du point A est alors  $\vec{U}_A^* = -x\omega^* \vec{y}$

$$W_{int}^* = \vec{M}_{\Omega^+/\Omega^-} \cdot \omega^* \vec{z} = M_{fz} \omega^*$$

$$W_{ext}^* = (X_A \vec{x} + Y_A \vec{y}) \cdot \vec{U}_A^* = -x Y_A \omega^*$$

Le PTV\* donne alors :

$$M_{fz} \omega^* - x Y_A \omega^* = 0 \quad \forall \omega^*$$

Soit  $M_{fz} = x Y_A$

## Méthode des déplacements simplifiés :

### Principe :

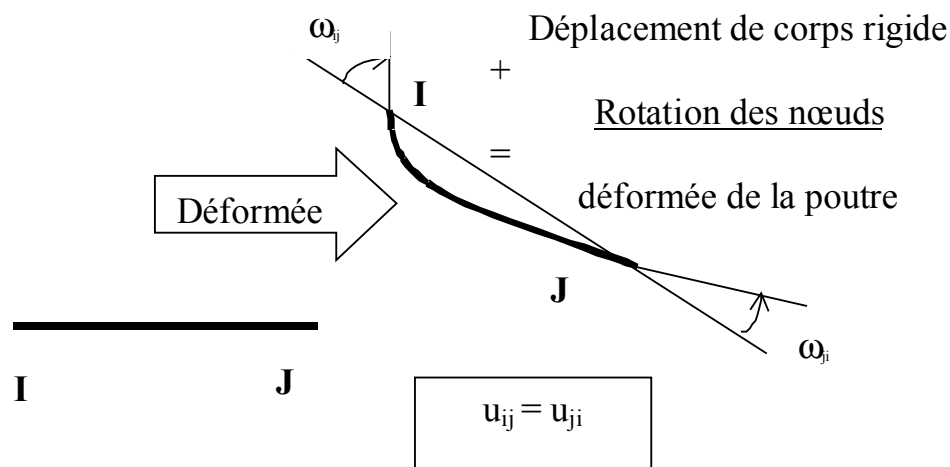
Il s'agit, comme nous l'avons fait pour la méthode des forces, de négliger l'énergie due à l'effort normal et à l'effort tranchant devant l'énergie due au moment fléchissant.

Cette hypothèse se traduit dans la méthode des déplacements en négligeant les déformées dues aux efforts normaux et tranchants.

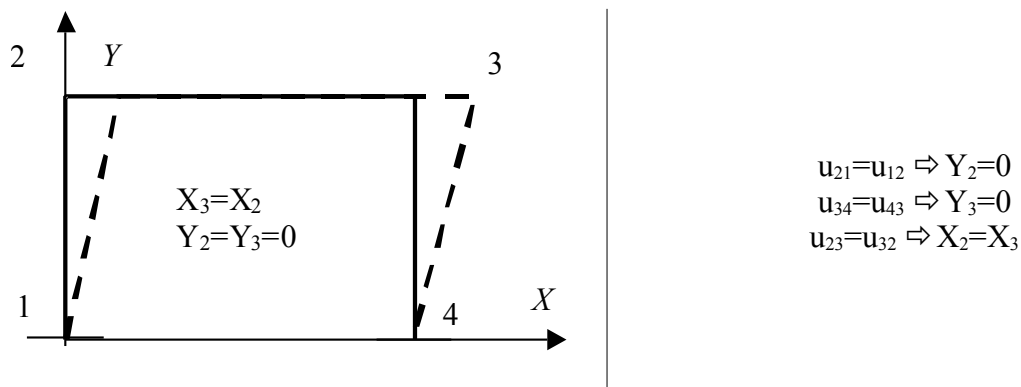
### Conséquences :

#### Conséquences sur les déplacements :

Si on néglige la déformée due à l'effort normal, on considère alors que la longueur des poutres est conservée. On dit que la longueur des barres est invariante.



Les déplacements des nœuds de la structure sont alors liés et par exemple, dans la structure suivante :



#### Conséquences sur les équations d'équilibre :

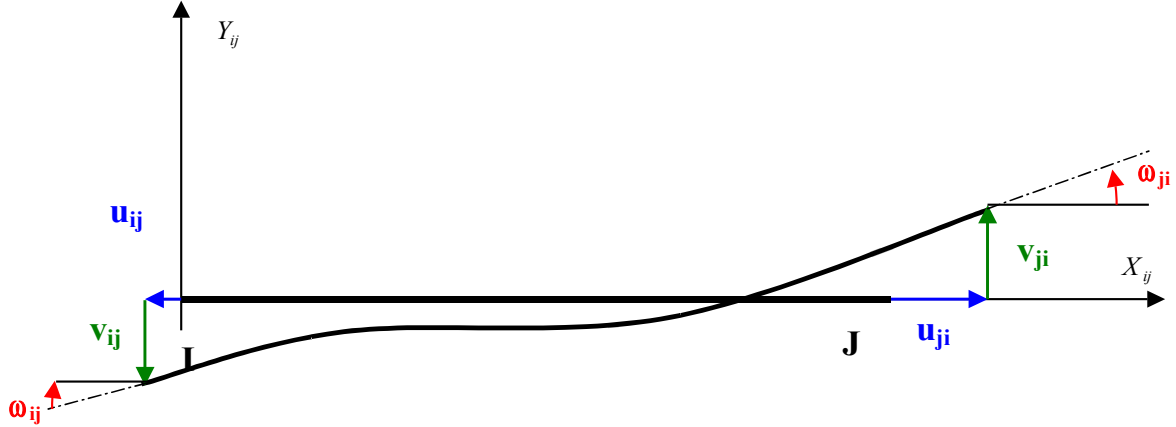
Les équations faisant intervenir l'effort normal ne sont plus valables, seules sont disponibles les équations de moment. Il manque donc des équations pour résoudre le problème, ces équations peuvent être obtenues par le principe des travaux virtuels (PTV\*)

**Notations et résultats précédents:**

Efforts aux nœuds dans le repère local : actions des nœuds sur la barre



Déplacements des nœuds dans le repère local



Attention les valeurs indiquées sont bien les projections sur les axes et par exemple  $v_{ij} = \vec{U}_i \cdot \vec{Y}_{ij}$  est un nombre négatif pour le déplacement représenté sur la figure. La remarque est la même pour les efforts.

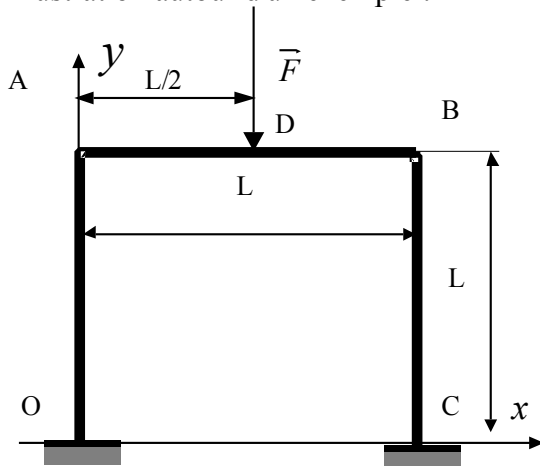
|  |
|--|
| Équations d'équilibre d'un élément de poutre |
|--|

|   |  |
|---|--|
| $\begin{cases} N_{ij} = \frac{EA}{L_{ij}}(u_{ij} - u_{ji}) + N_{ij}^0 \\ N_{ji} = \frac{EA}{L_{ij}}(u_{ji} - u_{ij}) + N_{ji}^0 \end{cases}$  | $\begin{cases} M_{ij} = \frac{4EI}{L_{ij}}\omega_{ij} + \frac{2EI}{L_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{L_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ij}^0 \\ M_{ji} = \frac{2EI}{L_{ij}}\omega_{ij} + \frac{4EI}{L_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{L_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ji}^0 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} V_{ij} = \frac{6EI}{L_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{L_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ij}^0 \\ V_{ji} = -\frac{6EI}{L_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{L_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ji}^0 \end{cases}$ |  |

- Relations établies en cours en utilisant par exemple la méthode des forces
- Dans ces équations :  $i < j$ .
- Les  $M_{ij}^0$ ,  $V_{ij}^0$  et  $N_{ij}^0$  n'interviennent que sur des poutres recevant un chargement extérieur en d'autres points que leurs noeuds, leur valeurs dépendent du type de chargement.
- Les équations  $N_{ij}$  ne sont pas valables dans le cadre de la méthode des déplacements simplifiés.

## Utilisation de la méthode des déplacements simplifiés :

Illustration autour d'un exemple :



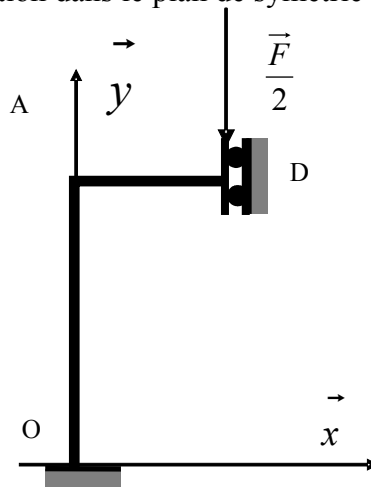
Portique bi encastré de longueur et de hauteur  $L$  chargé au milieu de la poutre par une force verticale.

L'inertie de la poutre et du poteau est  $I$ , le module d'élasticité du matériau,  $E$ .

On néglige les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.

### Prise en compte des symétries :

Le problème est symétrique par rapport à  $Dy$  (géométrie, liaisons et chargement), on traitera donc la moitié du problème en imposant un déplacement de  $D$  nul en projection sur  $x$  et une rotation de  $D$  nulle. La sollicitation dans le plan de symétrie est divisée par deux.



### Discrétisation :

- ❖ On découpe la structure en éléments de façon à ce que les charges concentrées soient appliquées aux nœuds et que les éléments aient un comportement connu (en général poutres droites).
- ❖ Pour chaque élément.
  - On met en place le repère local.
  - On écrit les conditions de liaisons aux nœuds.
  - On écrit l'invariance de la longueur des barres.
- ❖ On dénombre les déplacements et rotations inconnues du problème: ce sont les degrés de liberté.

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  | <p>Élément [1-2]</p> <p>Conditions limites :</p> $u_{12}=Y_1=0$ $v_{12}=-X_1=0$ $\omega_{12}=0$ <p>Longueurs de barres invariantes :</p> $u_{21}-u_{12}=0 \Rightarrow Y_2=0$ |
|  |  | <p>Élément [2-3]</p> <p>Conditions limites :</p> $u_{32}=X_3=0$ $\omega_{32}=0$ <p>Longueurs de barres invariantes :</p> $u_{23}-u_{32}=0 \Rightarrow X_2=0$                 |

Il reste 2 déplacements/rotation ou degrés de liberté indépendants :

- ❖ La rotation du nœud 2 :  $\omega_{21}=\omega_{23}=\Omega_2$
- ❖ Le déplacement vertical du nœud 3 :  $v_{32}=Y_3$

**Écriture des équations du PTV\* :**

On écrit les équations correspondantes aux déplacements générés par les degrés de libertés **indépendants** en considérant que les éléments de poutre sont rigides et articulés entre eux :

|  |   |
|--|---|
|  | <p>Le champ de déplacement virtuel correspond à la rotation du nœud 2 sans que les éléments [1-2] et [2-3] ne se déplacent. Seuls les moments <math>M_{23}</math> et <math>M_{21}</math> travaillent, les efforts extérieurs ne travaillent pas.</p> $-M_{23} \Omega_2^* - M_{21} \Omega_2^* = 0$ <p>soit</p> $(1) \quad M_{23} + M_{21} = 0$   |
|  | <p>L'élément [2-3] tourne autour de 2 de façon à déplacer le nœud 3 de <math>Y_3^*</math>.</p> <p>La rotation de l'élément est <math>\frac{Y_3^*}{L/2}</math></p> <p>Le travail des efforts extérieurs est :</p> $W_{ext}^* = F Y_3^* / 2$ <p>Le travail des efforts intérieurs est :</p> $W_{int}^* = (M_{23} + M_{32}) \frac{Y_3^*}{L/2}$ <p>Soit :</p> $(2) \quad FL + 4(M_{23} + M_{32}) = 0$ |



**Équilibre des éléments :**

On écrit les valeurs des moments en fonction des déplacements et des rotation à l'aide de la matrice de rigidité.

$$\begin{cases} M_{ij} = \frac{4EI}{L_{ij}} \omega_{ij} + \frac{2EI}{L_{ij}} \omega_{ji} + \frac{6EI}{L_{ij}^2} (v_{ij} - v_{ji}) \\ M_{ji} = \frac{2EI}{L_{ij}} \omega_{ij} + \frac{4EI}{L_{ij}} \omega_{ji} + \frac{6EI}{L_{ij}^2} (v_{ij} - v_{ji}) \end{cases}$$

Élément [1-2]

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{2EI}{L} \omega_2 \\ M_{21} = \frac{4EI}{L} \omega_2 \end{cases}$$

Élément [2-3] (Attention à L/2)

$$\begin{cases} M_{23} = \frac{8EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 \\ M_{32} = \frac{4EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 \end{cases}$$

**Résolution:**

On remplace les valeurs des moments dans les équations données par le PTV\*

$$\begin{cases} (1) \rightarrow \frac{8EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 + \frac{4EI}{L} \omega_2 = 0 \\ (2) \rightarrow FL + 4 \left( \frac{8EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 + \frac{4EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \rightarrow \frac{12EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 = 0 \\ (2) \rightarrow 4 \left( \frac{12EI}{L} \omega_2 - \frac{48EI}{L^2} Y_3 \right) = -FL \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_3 = \frac{FL^3}{96EI} \\ \omega_2 = \frac{FL^2}{48EI} \end{cases}$$

**Calcul des efforts et des moments dans les poutres:**

On peut alors calculer les moments et efforts tranchants dans les poutres en introduisant la valeur des degrés de liberté dans les équations d'équilibre des poutres.

Par contre on ne peut pas calculer directement l'effort normal.

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{2EI}{L} \omega_2 = \frac{FL}{24} \\ M_{21} = \frac{4EI}{L} \omega_2 = \frac{FL}{12} \\ M_{23} = \frac{8EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 = -\frac{FL}{12} \\ M_{32} = \frac{4EI}{L} \omega_2 - \frac{24EI}{L^2} Y_3 = -\frac{FL}{6} \end{cases}$$

Le moment fléchissant dans l'élément [I-J] de longueur  $L_{ij}$  est linéaire (élément non chargé) et vaut en fonction de l'abscisse locale  $x_{ij}$  :

- ❖ Au point I :  $M(0) = -M_{ij}$
- ❖ Au point J :  $M(L) = M_{ji}$

Soit : 
$$M(x_{ij}) = \frac{x_{ij}M_{ji} - (L_{ij} - x_{ij})M_{ij}}{L_{ij}}$$

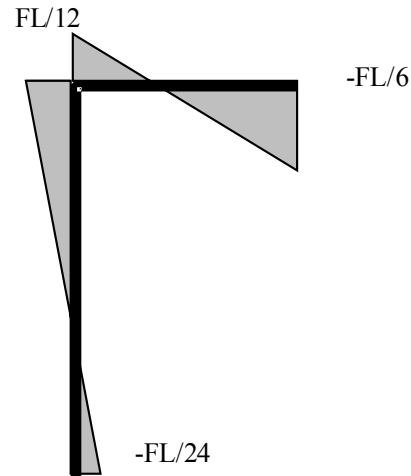


Diagramme des moments fléchissants

On peut utiliser les équations d'équilibre donnant l'effort tranchant :

$$\begin{cases} V_{ij} = \frac{6EI}{L_{ij}^2} (\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{L_{ij}^3} (v_{ij} - v_{ji}) \\ V_{ji} = -\frac{6EI}{L_{ij}^2} (\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{L_{ij}^3} (v_{ij} - v_{ji}) \end{cases}$$

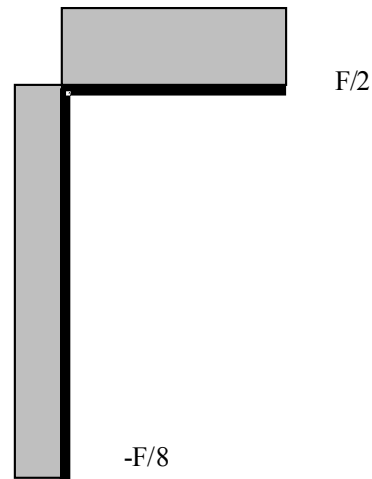


Diagramme des efforts tranchants

Ce qui donne :

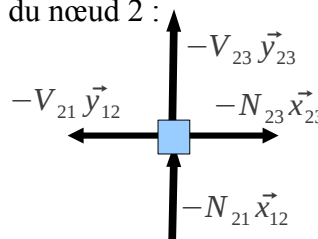
$$V_{12} = \frac{F}{8} = -V_{21}$$

$$V_{23} = -\frac{F}{2} = -V_{32}$$

L'effort tranchant dans l'élément [I-J] est constant (élément non chargé) et vaut

$$V = V_{ji} = -V_{ij}$$

Pour obtenir l'effort normal, il suffit d'écrire l'équilibre du nœud 2 :



$$\vec{F}_{[1-2]/2} + \vec{F}_{[2-3]/2} = \vec{0}$$

$$-N_{21} \vec{x}_{12} - V_{21} \vec{y}_{12} - N_{23} \vec{x}_{23} - V_{23} \vec{y}_{23} = \vec{0}$$

$$-N_{21} \vec{Y} + V_{21} \vec{X} - N_{23} \vec{X} - V_{23} \vec{Y} = \vec{0}$$

$$N_{21} = -V_{23} = \frac{F}{2} \quad N_{23} = V_{21} = -\frac{F}{8}$$

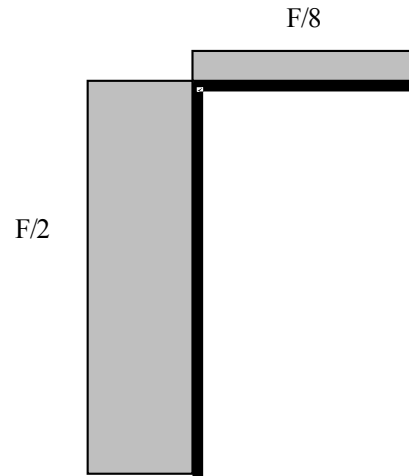


Diagramme des efforts normaux

**Cas d'un élément chargé :**

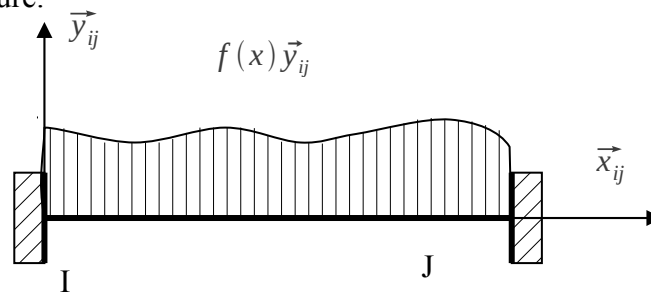
On utilise la superposition : La solution d'un problème correspondant à une poutre [I-J] sollicitée par :

- ❖ Des déplacements et rotations à ses extrémités.
- ❖ Une charge extérieure.

Est la superposition des problèmes suivants :

1. Poutre soumise seulement aux déplacements et rotations imposés aux nœuds.
2. Poutre à la quelle on impose des déplacements et rotations nuls aux nœuds sollicitée par la charge extérieure.

Le premier problème est déjà connu, le second correspond à une poutre bi-encastée sollicitée par la charge extérieure.



La solution du problème est donnée par les actions de liaison exercées par les nœud I et J sur la poutre [I-J]

$$\{F_{I|J}\} = \begin{Bmatrix} N_{ij}^0 \vec{x}_{ij} + V_{ij}^0 \vec{y}_{ij} \\ M_{ij}^0 \vec{z} \end{Bmatrix}_I \quad \{F_{J|I}\} = \begin{Bmatrix} N_{ji}^0 \vec{x}_{ij} + V_{ji}^0 \vec{y}_{ij} \\ M_{ji}^0 \vec{z} \end{Bmatrix}_J$$

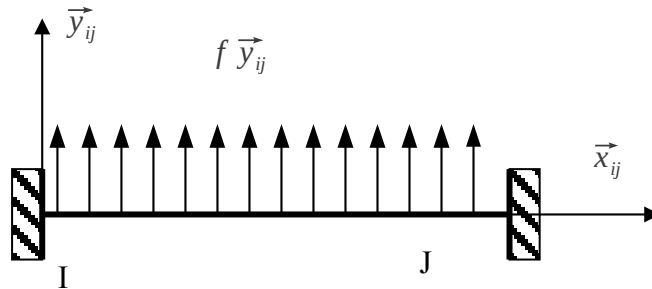
Les équations d'équilibre de la poutre deviennent :

$$\begin{cases} M_{ij} = \frac{4EI}{L} \omega_{ij} + \frac{2EI}{L} \omega_{ji} + \frac{6EI}{L^2} (v_{ij} - v_{ji}) + M_{ij}^0 \\ M_{ji} = \frac{2EI}{L} \omega_{ij} + \frac{4EI}{L} \omega_{ji} + \frac{6EI}{L^2} (v_{ij} - v_{ji}) + M_{ji}^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{ij} = \frac{6EI}{L^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{L^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ij}^0 \\ V_{ji} = -\frac{6EI}{L^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{L^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ji}^0 \end{cases}$$

**Charge uniformément répartie.**

Soit à résoudre le problème suivant :



On peut résoudre ce problème par la méthode des forces :

$$V_{ij}^0 = \frac{-fL}{2} \quad V_{ji}^0 = \frac{-fL}{2} \quad M_{ij}^0 = \frac{-fL^2}{12} \quad M_{ji}^0 = \frac{fL^2}{12}$$